Kan man dividera med noll?

Jesper Carlström

13 oktober 2001

Du kanske hör till dem som har fått höra att det är ”omöjligt” att dela med noll? Det är på ett sätt ett mycket förnuftigt påpekande, eftersom man måste vara medveten om att vår *vanliga* uppfattning om division inte medger division med noll, men på ett annat sätt är det inte riktigt sant.

Du kanske också hör till dem som en gång trodde att det var ”omöjligt” att dra kvadratroten ur -1? Kanske fick du sedan höra talas om komplexa tal, där man obehindrat kan dra roten ur -1? Många av dem som är med om detta, börjar i samma ögonblick att tvivla på det riktiga i att det skulle vara ”omöjligt” att dela med noll. Vad man troligen måste göra, tänker man, är att *utvidga* talområdet så att man får med ett tal $1/0$, låt oss kalla det ∞. Därefter skulle man kunna låta $x/0$ betyda $x \cdot \infty$ och därigenom skulle man ha infört en sorts division med noll.

Ett vanligt argument mot att detta skulle gå är följande. Antag att vi hade lyckats att ta in division med noll i våra kalkyler. Då skulle vi kunna räkna på följande vis:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 0 &= 7 \cdot 0 \text{ är sant,} \\ \text{alltså } \frac{3 \cdot 0}{0} &= \frac{7 \cdot 0}{0}, \\ \text{alltså } 3 &= 7. \end{aligned}$$

Vi skulle alltså kunna härleda $3 = 7$, vilket vore absurt. Vi kan ju inte acceptera en kalkyl som låter oss ”bevisa” felaktiga saker. Med ett sådant exempel i bagaget återvänder många från sökandet efter lösningen på detta problem. Kanske är det en sådan människa som någon gång har sagt dig att det är omöjligt att dela med noll?

Men om man fortfarande inte ger upp hoppet, så försöker man istället att förklara tokerierna ovan med att något i resonemanget är felaktigt. Första raden är helt klart riktig och andra raden också (om man nu har lyckats att införa division med noll). Det måste alltså vara slutsatsen från andra till tredje raden som inte fungerar. Där används ”strykning” eller ”förkortning”, vilket alltså verkar vara en princip som inte är acceptabel om man vill kunna dela med noll.

”Strykningen” som ger oss $\frac{3 \cdot 0}{0} = 3$ döljer egentligen följande resonemang: $\frac{3 \cdot 0}{0}$ är ett skrivsätt för $(3 \cdot 0) \cdot \infty$. Det är lika med $3 \cdot (0 \cdot \infty)$. Vi har $0 \cdot \infty = 1$, alltså $3 \cdot (0 \cdot \infty) = 3 \cdot 1 = 3$.

Precis samma principer kan användas för att ge $(7 \cdot 0) \cdot \infty = 7$. Det måste alltså vara något fel på dessa principer, eftersom det visserligen är sant att $(3 \cdot 0) \cdot \infty = (7 \cdot 0) \cdot \infty$ (p.g.a. att $3 \cdot 0 = 7 \cdot 0$), men inte att $3 = 7$. Om man analyserar argumentet finner man att det används tre principer. Det används att $x/0$ betyder detsamma som $x(1/0)$, att man har $(xy)z = x(yz)$ och att $0\infty = 1$. Vi måste alltså offra någon av dessa principer om vi skall kunna "dela" med noll.

Till att börja med ser man att principen $x/0 = x(1/0)$ inte är den som ställer till problem, det är först när den redan har använts som problemet uppkommer. Bara genom att använda principerna $(xy)z = x(yz)$ och $0\infty = 1$, får vi lätt ett absurt resonemang:

$$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot (0 \cdot \infty) = (3 \cdot 0) \cdot \infty = 0 \cdot \infty = (7 \cdot 0) \cdot \infty = 7 \cdot (0 \cdot \infty) = 7 \cdot 1 = 7.$$

Man kan också ge ett mindre invecklat exempel:

$$1 = 0 \cdot \infty = (0 \cdot 0) \cdot \infty = 0 \cdot (0 \cdot \infty) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Det är alltså principerna $(xy)z = x(yz)$ och $0\infty = 1$ som är oförenliga. Man måste dra slutsatsen att om vi skall lyckas att införa en "division" med noll, så måste vi söka efter en lösning där någon av dessa två principer inte gäller.

Mitt förslag är att vi gör allt för att behålla principen $(xy)z = x(yz)$, eftersom den är så grundläggande för algebraisk räkning. Principen $0\infty = 1$ ger ju bara ett samband mellan tre specifika tal, medan $(xy)z = x(yz)$ ger ett samband som gäller *alla*. Jag föreslår alltså att vi letar efter en lösning med $0\infty \neq 1$.

Om vi har $0\infty \neq 1$, så är det kanske istället naturligt att ha $0\infty = 0$, eftersom vi är vana vid principen $0x = 0$. Men om vi accepterar att $0\infty = 0$, så är den enklaste lösningen att helt enkelt låta '∞' bara vara ett nytt namn för något av våra gamla hederliga tal, kanske 0, 1 eller π. Då har vi automatiskt att $0\infty = 0$. Det verkar dock inte vara en särskilt fruktbar idé, den rymmer ju inte något nytt. Det finns därför goda skäl att söka efter en lösning där ∞ verkligen är någonting nytt.

En lösning är den följande. Vi vet att bråktal spelar en stor roll inom matematiken. Karakteristiskt för bråktal är att de bestäms av två heltal, nämligen täljaren och nämnaren. På grund av de idéer som ligger till grund för införandet av bråktal, är nämnaren alltid skild från noll. Men om vi bortser från dessa idéer, kan vi ändå betrakta bråktal, nämligen som helt enkelt varande par av heltal. Vi har då inte längre något som motiverar varför nämnaren skulle behöva vara nollskild. Bråktal är nyttiga verktyg inte alltid på grund av de idéer som ligger till grund för deras införande, utan lika ofta på grund av deras matematiska egenskaper. Dessa egenskaper beror mycket lite på de bakomliggande idéerna: vi kan exempelvis införa räkneoperationer på bråk utan att alls hänvisa till någon tolkning av vad de "betyder", genom att helt enkelt tala om att

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \Big/ \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

De vanliga heltalen låter vi här motsvaras av bråk enligt följande princip: om n är ett heltal, så motsvaras det av bråket $\frac{n}{1}$. Exempelvis motsvaras 0 av $\frac{0}{1}$, 1 av $\frac{1}{1}$ och -1 av $\frac{-1}{1}$. Bråket $\frac{1}{0}$ kallar vi för ∞. Vi har då att

$$1/0 = \frac{1}{1} \Big/ \frac{0}{1} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Vi har på detta sätt förklarat vad som skall menas med ”tal” (nämligen par av det vi förut kallade ”tal”) och vad som skall menas med de fyra räknesätten på dessa nya ”tal”.

Denna idé uppkom (väsentligen) 1997 i diskussioner mellan Per Martin-Löf och Anton Setzer. De resulterade i ett utkast till artikel av Setzer [2]. I min licentiatavhandling [1] studerar jag idén djupare och visar hur den kan användas på flera sätt. Nytt i avhandlingen är också följande räkneregler. De skall tolkas så att om man sätter in bråk för x, y, z och beräknar varje sida för sig, så får man alltid samma bråk på båda sidor. Om x är ett bråk, så menas med $/x$ det bråk som fås om man ”vänder upp-och-ned” på bråket x. Om x och y är bråk, betyder x/y detsamma som $x \cdot (/y)$, d.v.s. man vänder upp-och-ned på bråket y och multiplicerar resultatet med bråket x. Lägg märke till att x/y därmed blir precis det som vi angav som division tidigare. På samma sätt får vi den tidigare subtraktionen genom att låta $x - y = x + (-1)y$.

$$
\begin{array}{cc}
x + y = y + x & xy = yx \\
x + (y + z) = (x + y) + z & x(yz) = (xy)z \\
0 + x = x & 1x = x \\
& \\
1 + (-1) = 0 & 0 \cdot 0 = 0 \\
& (x + 0y)z = xz + 0y \\
/(xy) = (/y)/x & /(x + 0y) = /x + 0y \\
//x = x & x + 0/0 = 0/0 \\
& \\
x/y + z + 0y = (x + yz)/y & (x + y)z + 0z = xz + yz
\end{array}
$$

Dessa regler ersätter de vanliga räknereglerna. Det finns ingen regel $0x = 0$, helt enkelt för att den inte alltid gäller (prova själv att sätta in ∞ för x och räkna vad du får). Rent algebraiskt innebär det att man inte utan vidare kan stryka termer av typen $0x$. Istället kan man ”klumpa ihop dem”, man har nämligen regeln $0yz = 0y + 0z$ (sätt $x = 0$ i regeln $(x + 0y)z = xz + 0y$).

Det gäller inte alltid att $x - x = 0$ och $x/x = 1$ (prova med $x = \frac{0}{0}$), utan man får

$$
\begin{aligned}
x - x &= 1x + (-1)x = (1 + (-1))x + 0x = 0x + 0x = 0x^2 \\
x/x &= (0 + x1)/x = 0/x + 1 + 0x = 1 + 0x/x.
\end{aligned}
$$

Det betyder att för de x som uppfyller $0x = 0$, har man också $x - x = 0$ och $x/x = 1 + 0/x$. Om det dessutom gäller att $0/x = 0$, så följer $x/x = 1$.

Referenser

[1] J. Carlström. *Wheels — On Division by Zero*. Filosofie licentiatavhandling, Stockholms universitet, 2001. www.matematik.su.se/reports/2001/11/.

[2] A. Setzer. Wheels (draft). www-compsci.swan.ac.uk/˜csetzer/, 1997.